

Advanced Polynomial Cancellation Coded OFDM

Daniel Velten
DG1GDV

Version 1.1

3. April 2010

Zusammenfassung

Die Modulationsart PCC-OFDM verwendet zur Modulierung eine Linearkombination von mehreren OFDM-Einzelträgern. Die Nebenzipfel dieser Linearkombination unterdrücken sich gegenseitig. Das Spektrum der Linearkombination fällt dadurch schneller als die des Einzelträgers.

Wir stellen hier eine neue Methode vor, um gleich eine ganze Orthonormalbasis aus mehreren zur Verfügung stehender OFDM-Einzelträgern zu konstruieren. Das Spektrum jeder konstruierten Linearkombination fällt bei geeigneter Wahl der Parameter schnell im Frequenzspektrum ab.

Auf Basis der neuen Methode können Modulationsverfahren definiert werden, die gleichzeitig spektraleffizient und schnell im Frequenzraum abfallen.

1 Einführung

Die Fouriertransformierte jeder zeitbegrenzten Funktion zwischen den Zeitpunkten $-\pi$ und $+\pi$ lässt sich wie folgt darstellen (siehe Anhang A):

$$\mathcal{F}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{\sin(\omega\pi - k\pi)}{\omega\pi - k\pi} \quad (1)$$

Die Translationen der Funktionen $\text{sinc}(x) := \sin(\pi x)/\pi x$ bilden im Fourierraum eine Hilbertraum-Basis für im Zeitbereich zwischen $-\pi$ und $+\pi$ begrenzte Funktionen.

Wir wollen nun im Frequenzraum schnell abfallende Modulations-Funktionen konstruieren. Für uns genügt es Kombinationen endlich vieler dieser Funktionen zu betrachten. Dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel mit drei Koeffizienten:

$$\mathcal{G}(x) = c_1 \cdot \frac{\sin(x + \pi)}{x + \pi} + c_2 \cdot \frac{\sin(x + 2\pi)}{x + 2\pi} + c_3 \cdot \frac{\sin(x + 3\pi)}{x + 3\pi} \quad (2)$$

$$= \left(\frac{-c_1}{x + \pi} + \frac{c_2}{x + 2\pi} + \frac{-c_3}{x + 3\pi} \right) \cdot \sin(x) \quad (3)$$

$$= \left(\frac{-c_1(x + 2\pi)(x + 3\pi) + c_2(x + \pi)(x + 3\pi) - c_3(x + \pi)(x + 2\pi)}{(x + \pi) \cdot (x + 2\pi) \cdot (x + 3\pi)} \right) \cdot \sin(x) \quad (4)$$

$$= \left(\frac{(-c_1 + c_2 - c_3) \cdot x^2 + (-c_1 \cdot 5\pi + c_2 \cdot 4\pi - c_3 \cdot 3\pi) \cdot x - c_1 6\pi^2 + c_2 3\pi^2 - c_3 2\pi^2}{(x + \pi) \cdot (x + 2\pi) \cdot (x + 3\pi)} \right) \cdot \sin(x) \quad (5)$$

Damit die Summe des Spektrums der drei Fourier-Einzelträger im Fourierraum schnell abfällt, sollte das Polynom von x im Zähler von möglichst niedriger Ordnung sein. Falls die Koeffizienten in bestimmten Verhältnissen zueinander stehen, kann man im Zähler sogar eine Konstante erzwingen. Wählen wir beispielsweise $c_1 = \frac{1}{2}\tilde{c}$, $c_2 = \tilde{c}$, $c_3 = \frac{1}{2}\tilde{c}$. So ergibt sich:

$$\mathcal{G}(x) = \left(\frac{-\pi^2 \cdot \tilde{c}}{(x + \pi) \cdot (x + 2\pi) \cdot (x + 3\pi)} \right) \cdot \sin(x) \quad (6)$$

Stehen die Koeffizienten der Einzelträger unter bestimmten Verhältnissen, so heben sich die Nebenaustrahlungen der Einzelträger gegenseitig auf. Amplituden von Standard-OFDM-Einzelträger (ohne Cyclic Prefix und Windowing) fallen mit $\mathcal{O}(\frac{1}{x})$ ab. Die Amplitude einer Linear-Kombination von n Einzelträgern kann durch geeignete Wahl der Koeffizienten mit $\mathcal{O}(\frac{1}{x^n})$ abfallen.

Diese Möglichkeit der Selbstunterdrückung der Nebenaussendungen wurde bereits mehrfach diskutiert. Zhao, Y. und Haggman, S.G. nannten diese Eigenschaft ICI self-cancellation [1, 2].

Durch Armstrong et al. [3–5] wurde der Begriff Polynomial cancellation coding verwendet (PCC-OFDM).

Moduliert man nun statt der OFDM-Einzelträger eine schnell abfallende Linearkombination der Einzelträger ergibt sich eine neue Modulationsart (PCC-OFDM). Diese verursacht geringere Nachbarkanalstörungen und weist geringere Intercarrier-Interferenzen (ICI) z.B. bei Frequenzverschiebungen auf.

Mit dem Verlust von zu modulierenden Freiheitsgraden ist jedoch in der Regel ein Verlust an Spektraleffizienz verbunden, der durch einen höheren Signal-Rauschabstand in den verbliebenen Freiheitsgraden nicht ausgeglichen werden kann.

Es wurde auch bereits versucht durch subcarrier weighting [6] oder cancellation carriers [7] die Nachbarkanalstörungen zu reduzieren.

2 Konstruktion neuer Modulationsarten

Bisher wurde lediglich versucht genau ein Polynom auszuwählen und die sich ergebende Linearkombination zu modulieren. Wir wollen mehrere Polynome auswählen, die orthogonal zueinander sind und modulieren alle getrennt voneinander. Dadurch kann man die Verluste an Freiheitsgraden reduzieren und somit die Spektraleffizienz erhöhen.

Betrachten wir zunächst noch einmal folgendes Ergebnis:

Ein OFDM-Spektrum einer Gruppe von n Einzel-Trägern lässt sich wie folgt darstellen:

$$\mathcal{G}(x) = \frac{\text{Polynom}_{n-1}(x)}{\text{Polynom}_n(x)} \cdot \sin(x) \quad (7)$$

Dabei steht im Nenner immer ein Polynom n . Grades. Der Nenner ist nicht abhängig von den Koeffizienten c_k der OFDM-Einzelträger. An den Nullstellen des Nennerpolynoms liegen gerade auch die Nullstellen des Sinus. Der Ausdruck ist daher wohldefiniert.

Im Zähler kann abhängig von den n Koeffizienten c_k ein Polynom bis zum Grad $n - 1$ stehen. Damit der Abfall der Funktion nach $+\infty$ von möglichst hoher Ordnung ist, sollte das Zähler-Polynom von möglichst niedriger Ordnung sein.

Außerdem sei erwähnt, dass wir hier eine sehr schöne Kette von Isomorphismen bzw. Homomorphismen vor uns haben. Der Hilbertraum der zeitlich begrenzten Funktionen mit $\mathcal{L}^2$ Norm besitzt einen Isomorphismus zum Fourierraum mit unendlich vielen Koeffizienten und der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Da wir aus pragmatischen Gründen nur endlich viele Einzelträger modulieren wollen, haben wir einen Homomorphismus auf den Teilraum der n verwendeten Träger ($\mathbb{R}^n$) mit euklidischer Norm. Dies induziert wiederum einen Isomorphismus in den Raum der Zähler-Polynome vom Grad $n - 1$ mit einer entsprechenden induzierten Norm.

Wie berechnet man nun die Norm eines Polynoms in einer induzierten Norm? Wir berechnen für das Polynom die Fourierkoeffizienten und berechnen die Norm auf den Fourierkoeffizienten.

Diese erhält man durch Auswerten des Polynoms an den Positionen der n -Einzelträgern und Teilung durch einen Gewichtungsfaktor. Dieser Gewichtungsfaktor ist durch Auswertung des Nenners an dieser Stelle und den Sinus gegeben. Dabei hebt die Singularitäten des Sinus die Nullstelle des Nennerpolynoms an dieser Stelle. Es verbleibt jedoch ein Minus-Zeichen an jedem zweiten OFDM-Einzelträger.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun sehr einfach neue Modulationsverfahren konstruieren.

Jede orthonormale Basis im Raum der Polynome definiert letztendlich ein neues Modulationsverfahren. Die Basisvektoren können unabhängig voneinander z.B. QAM oder PSK moduliert werden.

Wir wollen nun eine schnell abfallende Modulationsart konstruieren, wir verwenden daher nur den Untervektorraum der Polynome bis zum Grad $m - 1$ mit $m \leq n$. Der Abfall der Amplitude im Frequenzraum ist somit proportional zu $\mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+n-m}})$.

Eine Basis dieses Untervektorraumes sind beispielsweise $x^0, x^1, \dots, x^{m-2}, x^{m-1}$. Mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens kann man daraus eine Orthonormalbasis konstruieren. Für jeden durch diesen ersten Ansatz erzeugten Orthonormalbasisvektor fällt die Amplitude im Frequenzraum mit mindestens $\mathcal{O}(\frac{1}{x^{1+n-m}})$ ab.

OFDM verdankt seine Fähigkeit der Resistenz gegen Multipath-Fading der Frequenz-Lokalisierung seiner Einzelträger. Deshalb sollten auch unsere orthonormale Basisvektoren bei verschiedenen Frequenzen konzentriert sein und wenig um den Mittelwert streuen. Der obige erste Ansatz war recht willkürlich und ist vermutlich eher das Gegenteil. Zerstreut im Frequenzbereich, konzentriert im Zeitbereich.

Da man die Basisvektoren immer noch beliebig drehen kann, kann man nun ein numerisches Suchverfahren

konstruieren, das besser geeignete Basisvektoren sucht. Beispielsweise kann man versuchen die Summe oder das Maximum der Varianzen der Basisvektoren zu minimieren. Ein Anhaltspunkt für die Lokalisierung eines Basisvektors im Frequenzbereich liefert auch das Maximum bei Norm 1. So kann man auch die Summe der Maxima oder das Minimum der Maxima der Basisvektoren maximieren.

Bessere Ausgangspunkte für numerische Suchverfahren erhält man durch geeignete Lagrange-Interpolationspolynome. Lagrange-Interpolationspolynome sind gegeben durch m Nullstellen. Jedes Basis-Polynom nutzt aus dieser Menge $m - 1$ Nullstellen und ist an der ausgelassenen Nullstelle für Interpolationszwecke gleich 1. Die Stützstellen dieser Polynome sind geeignet über das Intervall zu positionieren. Da diese in der Regel nicht orthonormal in unserer induzierten Norm sind, müssen sie ebenfalls mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens orthonormalisiert werden.

Wäre ein solches, durch die Stützstellen festgelegtes System, eine orthogonale Basis in unserer induzierten Norm, hätten wir auch gleichzeitig gute Resistenz gegen Multipath-Fading erreicht. Die Menge der benutzten Nullstellen sind durch m Variablen gegeben. Die Orthogonalität schränkt die Zahl der Freiheitsgrade um $m - 1$ ein. Der letzte verbliebene Freiheitsgrad wird für Verschiebung des Systems auf der Frequenzachse benötigt.

Die Existenz ist auf den ersten Blick fraglich. Ein Polynom könnte auch weniger Nullstellen besitzen müssen. Auch müssen die Nullstellen in dieser Darstellung nicht reell sein. In der Praxis sind diese Nullstellen jedoch vorhanden und reell.

Um die Nullstellen eines solchen Systems zu finden, habe ich daher ein Näherungsverfahren entwickelt. Dieses basiert auf das Newtonsche Näherungsverfahren, geht von gemeinsamen Nullstellen aus und optimiert die Orthogonalität.

3 Rechenaufwand

Nachdem man m geeignete Polynome gefunden hat erhält man eine reelle Matrizenoperation, die die n -komplexen Fourierkoeffizienten in die komplexen Koeffizienten der m -Basisvektoren abbildet. Es handelt sich also um eine $m \times n$ -Matrix. Wir benötigen für eine solche Operation $2 \cdot n \cdot m$ reelle Multiplikationen oder $\frac{1}{2} \cdot n \cdot m$ komplexe Multiplikationen.

Eine solche Matrizenmultiplikation ist daher für große n bzw. m rechenaufwendig. In der Praxis wird man daher bei einer hohen Trägeranzahl die Träger in Gruppen aufteilen und das Verfahren auf die einzelnen Gruppen anwenden. Das reduziert wegen der stark abfallenden Flanken auch Inter Channel Interferenzen (ICI).

Hat man N Fourier-Einzelträger und eine Gruppengröße von n . So ergeben sich $\frac{N}{n}$ -Gruppen. Der Rechenaufwand beträgt also $\frac{N}{n} \cdot 2 \cdot n \cdot m$ reelle Multiplikationen.

Beispiel:

Für $N = 1024$, $n = 16$ und $m = 12$ ergeben sich $1024 \cdot 2 \cdot 12 = 24576$ reelle Multiplikationen für die Matrizenmultiplikation. Die ebenfalls nötige Fouriertransformation erfordert je nach Verfahren weitere $2 \cdot 1024 \cdot \log_2(1024) = 20480$ reelle Multiplikationen. Die Amplituden fallen in diesem Beispiel mit $\mathcal{O}(\frac{1}{x^5})$, die Leistungsdichte also mit $\mathcal{O}(\frac{1}{x^{10}})$.

Vielleicht gibt es schnellere Berechnungsversion. Eine einfache Idee ist, die Matrix Multiplikation mit den ersten $\log_2(n)$ Stufen der FFT zu kombinieren. Dies scheitert jedoch daran, dass dann eine komplexe Matrixmultiplikation notwendig ist. Dies reduziert somit in der Regel nicht die Zahl der Multiplikationen.

4 Anwendung in der Praxis

Die neue Modulationart wurde genau für einen beschränkten Zeitbereich konstruiert. Es darf keinesfalls ein Cyclic Prefix verwendet werden. Man kann Sie aber mit 0-Werten fortsetzen (Zero-Padding bzw. Zero-Prefix). Im Empfänger kopiert man das Guard Intervall wieder an den Anfang und stellt so die verlorengegangene Orthogonalität wieder her. Nachteilig ist, dass man so auch zusätzliches Rauschen mitkopiert.

Die Guard-Intervall-Zeit kann bei mehreren ungenutzten Dimensionen $n-m$ kürzer ausfallen, da die Funktionen an den Intervallenden $n-m-1$ mal stetig differenzierbar sind und dadurch je nach Wahl von n und m sehr langsam steigen oder fallen. Sie sind auch ohne Guard-Intervall vergleichsweise robust gegen Multi-Path-Fading.

Bei Standard-OFDM wurde auch das Windowing in der Guard-Intervall-Zeit durchgeführt, dadurch wurde meist die Guard-Intervall-Zeit künstlich länger gewählt. Dies ist hier nicht mehr nötig.

Bei Standard-OFDM wurde am Rande des Frequenzbereichs auch eine größere Anzahl Träger nicht genutzt (guard band) um den Nachbarn nicht zu stören, bzw. um selbst nicht gestört zu werden. Da bei der vorgestellten Methode, die Leistungsdichte schneller abfällt, kann man diese Frequenzen nun teilweise wieder nutzen. An den Frequenzrändern kann man auch die Zahl ungenutzter Dimensionen $n-m$ erhöhen und so noch schneller abfallende Funktionen benutzen.

Vom PAPR-Verhältnis ist die neue Methode immer noch genauso schlecht oder schlechter wie OFDM. Die neue Modulationsart sollte daher mit einer Methode zur Reduktion des PAPR kombiniert werden. Die meisten PAPR-Reduktionsmethoden, die von OFDM bekannt sind, lassen sich auch auf die hier vorgestellte neue Modulationsart anwenden. Im Übersichtsartikel von Han, S.H. and Lee, J.H. [8] werden einige anwendbare Methoden vorgestellt.

Ein wichtiger Unterschied zu OFDM ist, dass die Leistung über die Zeit hinweg nicht konstant ist. Im Unterschied zu OFDM fallen die Amplituden an den Intervallenden im Zeitbereich immer glatt gegen 0. Dies führt zunächst zu einem noch ungünstigerem PAPR-Verhältnis. Man kann dies jedoch durch eine zeitliche Versetzung der Träger leicht beheben.

Hat man sehr viele Träger, und hat man diese Träger, wie oben vorgeschlagen, in Gruppen unterteilt, so kann man auch die gesamten Gruppen zueinander zeitlich versetzen.

Ist die Gruppengröße eine Potenz von 2 (2^n Gruppenmitglieder), so kann man die Verschiebung der Gruppen zueinander sehr leicht innerhalb einer klassischen FFT durchführen. Die ersten n Stufen einer klassischen inversen FFT nach Cooley und Tukey führen nur Multiplikationen und Additionen innerhalb der Gruppe durch. Genauer gesagt führen die ersten n Stufen der inversen FFT auf jeder Gruppe getrennt voneinander eine FFT durch. Nach den n Stufen liegen also die Gruppen quasi nicht mehr im Frequenzraum, sondern im Realraum vor. Die restlichen Stufen der inversen FFT sorgen anschließend lediglich für ein "Multiplexing" der Gruppen im Frequenzraum.

Nach n Stufen kann man deshalb die Daten der Gruppen sehr einfach zeitlich versetzen und den freiwerdenden Platz mit Daten des vorherigen oder des folgenden Symbols erweitern. Die Orthogonalität bleibt dabei natürlich erhalten. Zusätzlicher Rechenaufwand in Form von Additionen und Multiplikationen ist nicht erforderlich. Man hat sogar den Vorteil, dass der Rechenaufwand kontinuierlich anfällt. Eventuell kann man so sogar bessere Latenzzeiten erhalten.

	Advanced PCC-OFDM	OFDM with CP and windowing
Mehrwegempfang	sehr gut	sehr gut
Spektrale Effizienz	kann besser sein, hängt von Parametern ab	gut
Nachbarkanalstörungen	kann sehr gut sein, hängt von Parametern ab	geht so, bei vielen Einzelträgern wirds besser
PAPR	schlecht	schlecht
ICI	sehr gut zwischen Gruppen, schlecht innerhalb der Gruppe	schlecht
Rechenaufwand	höher, hängt von der Gruppeneinteilung ab	niegrig
Skalierbarkeit	noch besser	sehr gut

Tabelle 1: Feature comparison table, Note: No BER-Simulations have been done

5 Weiterer Forschungsbedarf

Bit-Error-Rate - Simulationen unter verschiedenen Bedingungen.

Anwendung in der Praxis.

Orthonormale Basen für den Fall, das nicht alle Freiheitsgrade für das schnelle Abfallen im Frequenzraum benutzt werden. Zum Beispiel für eine Verbesserung gegenüber Frequenzverschiebungen.

Schnellere Berechnungsmethoden

6 Änderungen

Version 1.1 (3. April, 2010)

Methode zur PAPR-Reduktion durch zeitliche Versetzung der Träger hinzugefügt.

Version 1.0 (6. February, 2010)

Erstmalige Veröffentlichung

7 Anhang A

Zeitbegrenzte Funktionen zwischen den Zeitpunkten $-\pi$ und $+\pi$ können wie folgt dargestellt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt) \cdot 1_{[-\pi, \pi]}(t)) \quad (8)$$

Wir verwenden hier die komplexe Darstellung:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikt} \cdot 1_{[-\pi, \pi]}(t) \quad (9)$$

Im Fourierraum ergibt sich:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikt} \cdot 1_{[-\pi, \pi]}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\omega)t} dt \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{e^{i(k-\omega)\pi} - e^{-i(k-\omega)\pi}}{i(k-\omega)} \quad (12)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{e^{i(k-\omega)\pi} - e^{-i(k-\omega)\pi}}{i2(k-\omega)\pi} \quad (13)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{\sin((k-\omega)\pi)}{(k-\omega)\pi} \quad (14)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \frac{\sin(\omega\pi - k\pi)}{\omega\pi - k\pi} \quad (15)$$

Literatur

- [1] Y. Zhao and S.G. Haggman. Sensitivity to Doppler shift and carrier frequency errors in OFDM systems-the consequences and solutions. In *Proc. IEEE VTC*, volume 3, pages 1564–1568, 1996.
- [2] Y. Zhao and S.G. Haggman. Intercarrier interference self-cancellation scheme for OFDM mobile communication systems. *IEEE Transactions on Communications*, 49(7):1185–1191, 2001.
- [3] J. Armstrong et al. Analysis of new and existing methods of reducing intercarrier interference due to carrier frequency offset in OFDM. *IEEE Transactions on Communications*, 47(3):365–369, 1999.
- [4] K.A. Seaton and J. Armstrong. Polynomial cancellation coding and finite differences. *IEEE transactions on Information Theory*, 46(1):311–313, 2000.
- [5] K. Panta and J. Armstrong. Spectral analysis of OFDM signals and its improvement by polynomial cancellation coding. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 49(4):939–943, 2003.
- [6] I. Cosovic, S. Brandes, and M. Schnell. Subcarrier weighting: a method for sidelobe suppression in OFDM systems. *IEEE Communications Letters*, 10(6):444–446, 2006.
- [7] S. Brandes, I. Cosovic, and M. Schnell. Sidelobe suppression in OFDM systems by insertion of cancellation carriers. In *2005 IEEE 62nd Vehicular Technology Conference, 2005. VTC-2005-Fall*, volume 1, 2005.
- [8] S.H. Han and J.H. Lee. An overview of peak-to-average power ratio reduction techniques for multicarrier transmission. *IEEE wireless communications*, 12(2):56–65, 2005.